

Лекція 7

Відображення та функції

Введення

Функція - математичне поняття, що відображає зв'язок між елементами множин. Можна сказати, що функція це "закон", за яким кожному елементу однієї множини (званому *областю визначення*) ставиться у відповідність певний елемент іншої безлічі (званого *областю значень*).

Математичне поняття функції виражає інтуїтивне уявлення про те, як одна величина повністю визначає значення іншої величини. Так значення змінної x однозначно визначає значення виразу x^2 , А значення місяці однозначно визначає значення наступного за ним місяця, також будь-якій людині можна зіставити іншу людину - його батька. Аналогічно, деякий задуманий заздалегідь алгоритм по варійованих вхідними даними видає певні вихідні дані.

Часто під терміном "функція" розуміється числова функція; тобто функція яка ставить одні числа у відповідність іншим. Ці функції зручно представляються на малюнках у вигляді графіків.

1. Історія

Термін "функція" (в деякому більш вузькому сенсі) був вперше використаний Лейбніцем (1692 рік). У свою чергу, Йоганн Бернуллі в листі до того ж Лейбніцу вжив цей термін в сенсі, більш близькому до сучасного. ^[1]

Спочатку, поняття функції було відрізнити від поняття аналітичного уявлення. Згодом з'явилося визначення функції, дане Ейлером (1751 рік), потім - у Лакруа (1806 рік) - вже практично в сучасному нам вигляді. Нарешті, загальне визначення функції (у сучасній формі, але для числових функцій) було дано Лобачевським (1834 рік) і Дирихле (1837 рік).

До кінця XIX століття поняття функції переросло рамки числових систем. Першими це зробили векторні функції, незабаром Фреге ввів логічні функції (1879), а після появи теорії множин Дедекінда (1887) і Пeano (1911) сформулювали сучасне універсальне визначення.

2. Визначення

Найбільш суворим визначенням функції є теоретико-множинне визначення (на основі поняття бінарного відношення). Часто замість визначення функції дається її інтуїтивне опис; тобто поняття функції перекладається на звичайну мову, використовуючи слова "закон", "правило" або "відповідність".

2.1. Інтуїтивне опис

Функція f (Відображення, операція, оператор) - це закон або правило, згідно з яким кожному елементу x з безлічі X ставиться у відповідність єдиний елемент y з безлічі Y .

При цьому говорять, що функція f задана на множині X , або що f відображає X в Y .

Якщо елементу $x \in X$ сопоставлен елемент $y \in Y$, то говорять, що елемент y знаходиться у **функціональній залежності** f від елемента x . При цьому

змінна x називається **аргументом** функції f або **незалежної змінної**, безліч X називається **областю завдання** або **областю визначення** функції, а елемент y , Відповідний конкретному елементу x - **Приватним значенням** функції f в точці x . Безліч Y всіх можливих приватних значень функції f називається її **областю значень** або **областю зміни**.

2.2. Теоретико-множинне визначення

У теоретичній математиці функцію f зручно визначити як **бінарне відношення** (тобто безліч **впорядкованих пар** $(x, y) \in X \times Y$), Яке задовольняє наступній умові: для будь-якого $x \in X$ існує єдиний елемент $y \in Y$ такий, що $(x, y) \in f$.

Це і дозволяє говорити про те, що елементу $x \in X$ зіставлений **один і тільки один** елемент $y \in Y$ такий, що $(x, y) \in f$.

Таким чином, **функція** - це **впорядкована трійка** (або **кортеж**) об'єктів (F, X, Y) , Де

- безліч X називається **областю визначення**;
- безліч Y називається **областю значень**;
- безліч впорядкованих пар $f \subseteq X \times Y$ або, що те ж саме, **графік функції**.

3. Позначення

Якщо задана функція f , Яка визначена на множині X та приймає значення в множині Y , Тобто, функція f **відображає** безліч X в Y , То

- цей факт коротко записують у вигляді $f: X \rightarrow Y$ або $X \xrightarrow{f} Y$.
- область визначення функції f (Безліч X) Позначається $D(f)$, Або $\text{dom } f$;
- область значень функції f (Безліч Y) Позначається $R(f)$ ($E(f)$), Або $\text{cod } f$ ($\text{ran } f$).

Наявність функціональної залежності між елементом $x \in X$ і елементом $y \in Y$

- найбільш часто позначається як
 $y = f(x)$,
 $f: x \mapsto y$ або
 $x \mapsto y$;
- рідше використовується позначення без дужок $y = fx$, $y = f \circ x$ або $y = xf$,
- а там, де необхідно підкреслити подвійність, використовуються позначення з дужками: $y = (f, x)$ або $y = (x, f)$;
- так само існує і операторний позначення $y = x^f$, Яке можна зустріти в **загальній алгебрі**.
- $\lambda x. y$ в **лямбда-численні** Черча.

3.1. Функції декількох аргументів

Визначення функції легко узагальнити на випадок функції багатьох аргументів.

Якщо безліч X являє собою **декартовий твір** множин $X_1, X_2, \dots, X_n$, Тоді відображення $f: X \rightarrow Y$ виявляється n -Місцевим відображенням, при цьому елементи впорядкованого набору $x = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ називаються аргументами (даної n -Місній функції), кожен з яких пробігає своє безліч:

$x_i \in X_i$ де $i = \overline{1, n}$.

У цьому випадку $y = f(x)$ означає, що $y = f\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$.

4. Способи завдання функції

4.1. Аналітичний спосіб

Функція математичний об'єкт являє собою бінарне відношення, яке задовольняє певним умовам. Функцію можна задати безпосередньо як безліч впорядкованих пар, наприклад: $f = \{(a, d), (b, e), (c, f)\}$ є функція $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{d, e, f\}$. Однак, цей спосіб зовсім непридатний для функцій на нескінченних множинах (якими є звичні речові функції: статечний, лінійна, показова, логарифмічна і т. п.).

Для завдання функції користуються виразом: $y = f(x)$. При цьому, x є змінна, що пробігає область визначення функції, а y - Область значень. Цей запис говорить про наявність функціональної залежності між елементами множин. X і y можуть пробігати будь-яку безліч об'єктів будь-якої природи. Це можуть бути числа, вектори, матриці, яблука, кольору веселки. Пояснимо на прикладі:

Нехай є безліч $X = \{\text{яблуко, літак, груша, стілець}\}$ і безліч $Y = \{\text{людина, паровоз, квадрат}\}$. Задамо функцію f наступним чином: $f = \{(\text{Яблуко, людина}), (\text{літак, паровоз}), (\text{груша, квадрат}), (\text{стілець, людина})\}$. Якщо ввести змінну x , пробігають безліч X і змінну y , пробігають безліч Y , Зазначену функцію можна задати аналітично, як: $y = f(x)$.

Аналогічно можна задавати числові функції. Наприклад: $y = x^2$ де x пробігає безліч дійсних чисел задає деяку функцію f . Важливо розуміти, що саме вираження $y = x^2$ не є функцією. Функція як об'єкт являє собою безліч (упорядкованих пар). А цей вислів як об'єкт є рівність двох змінних. Воно задає функцію, але не є нею.

Однак, у багатьох розділах математики, можна позначати через $f(x)$ як саму функцію, так і аналітичний вираз, що задає її. Це синтаксичне угода є вкрай зручним і виправданим.

4.2. Графічний спосіб

Числові функції можна також задавати з допомогою графіка. Нехай $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - Речова функція n змінних.

Розглянемо деякий $(n+1)$ -мірне лінійний простір над полем дійсних чисел (так як функція речова). Виберемо в цьому просторі будь базис $(\vec{e}_z, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Кожній точці функції зіставимо вектор: $z\vec{e}_z + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$. Таким чином, ми будемо мати безліч векторів лінійного простору, відповідних точкам даної функції за вказаною правилом. Точки відповідного афінного простору будуть утворювати деяку поверхню.

Якщо як лінійного простору взяти евклидово простір вільних геометричних векторів (спрямованих відрізків), а число аргументів функції f не перевершує 2, зазначений безліч точок можна зобразити наочно у вигляді креслення

(графіка). Якщо понад те вихідний базис взяти ортонормированном, отримаємо "шкільне" визначення графіка функції.

Для функцій 3 аргументів і більше таке подання не стосується зважаючи на відсутність у людини геометричній інтуїції багатовимірних просторів.

Однак, і для таких функцій можна придумати наочне полугеометрическое подання (наприклад кожному значенню четвертої координати точки зіставити деякий колір на графіку)

5. Пов'язані визначення

5.1. Звуження і продовження функції

Нехай дано відображення $f: X \rightarrow Y$; $M \subset X$.

Відображення $g: M \rightarrow Y$, Яка приймає на M ті ж значення, що і функція f , Називається **звуженням** (або, інакше **обмеженням**) функції f на безліч M .

Звуження функції f на безліч M позначається як $f|_M$.

Якщо функція $g: M \rightarrow Y$ така, що вона є звуженням для деякої функції $f: X \rightarrow Y$, То функція f , В свою чергу, називається **продовженням** функції g на безліч X .

5.2. Образ і прообраз (при відображенні)

Елемент $y = f(x)$, Який сопоставлен елементу x , Називається **чином** елемента (точки) x (При відображенні f).

Якщо взяти ціле *підмножина* A області визначення функції f , То можна розглянути сукупність образів всіх елементів множини A , А саме підмножина області значень (функції f) Виду

$$f(A) := \{f(x): x \in A\},$$

яке, називається **чином безлічі** A (При відображенні f). Це безліч іноді позначається як $f[A]$ або A^f .

Навпаки, взявши деяку підмножину B області значень функції f , Можна розглянути сукупність тих елементів області визначення (функції f), Чий образи потрапляють в безліч B , А саме - безліч виду

$$f^{-1}(B) := \{x: f(x) \in B\},$$

яке називається **(повним) прообразом** безлічі B (При відображенні f).

У тому окремому випадку, коли безліч B складається з одного елемента, скажімо, $B = \{y\}$, Безліч $f^{-1}(\{y\}) = \{x: f(x) = y\}$ має більш просте позначення $f^{-1}(y)$.

5.3. Тотожне відображення

Відображення, у яких збігаються область визначення і область значень, називаються відображеннями заданої множини **в себе** або **перетвореннями**.

Зокрема, перетворення $f: X \rightarrow X$, Яке зіставляє кожній точці x безлічі X її саму або, що теж саме,

$$f(x) = x \text{ для кожного } x \in X,$$

називається **тотожним**.

Це відображення має спеціальне позначення: i_X або, простіше, i (Якщо з контексту зрозуміло, яке безліч мається на увазі). Таке позначення зобов'язане своїм походженням англ. слову *identity* ("ідентичність, тотожність").

Інше позначення тотожного перетворення - 1_X . Таке відображення є унарний операцією, заданої на множині X . Тому, нерідко, тотожне перетворення називають **одиничним**.

5.4. Композиція відображень

Нехай $f: X \rightarrow Y$ і $g: Y \rightarrow Z$ - Два заданих відображення таких, що область значень першого відображення є підмножиною області визначення другого відображення. Тоді для всякого $x \in X$ однозначно визначається елемент $y \in Y$ такий, що $y = f(x)$, Але для цього самого y однозначно визначається елемент $z \in Z$ такий, що $z = g(y)$. Тобто, для всякого $x \in X$ однозначно визначається елемент $z \in Z$ такий, що $z = g(f(x))$. Іншими словами, визначено відображення h таке, що

$$h(x) = g(f(x)) \text{ для всякого } x \in X.$$

Це відображення називається **композицією** відображень f і g і позначається

- або $f \cdot g$ або $f \circ g$,
- або $g \circ f$ (Саме в такому порядку!), Що є найбільш вживаною.

5.5. Зворотне відображення

Якщо відображення $f: X \rightarrow Y$ є взаємно однозначним або **биективне** (див. нижче), то визначено відображення $f^{-1}: Y \rightarrow X$, у якого

- область визначення (безліч Y) збігається з областю значень відображення f ;
- область значень (безліч X) збігається з областю визначення відображення f ;
- $x = f^{-1}(y)$ тоді і тільки тоді, коли $y = f(x)$.

Таке відображення називається **зворотним** по відношенню до відображення f .

Відображення, у якого визначено зворотне, називається **оборотним**.

У термінах композиції функцій, властивість оборотності полягає в одночасному виконанні двох умов: $f^{-1} \circ f = id_X$ і $f \circ f^{-1} = id_Y$.

6. Властивості

Нехай задана функція $f: X \rightarrow Y$, де X і Y - Дані множини, причому $X = d$ о m f . Кожна така функція може мати деякі властивості, опис яких наведено нижче.

6.1. Образ і прообраз при відображенні

6.1.1. Взяття образу

Покладемо, A і B - Підмножини області визначення. Взяття образу (або, що те ж саме, застосування оператора f) Має такі властивості:

- $f(\emptyset) = \emptyset$;
- $A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \neq \emptyset$;
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Далі

- образ об'єднання дорівнює об'єднанню образів: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- образ перетину є підмножиною перетину образів $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Останні дві властивості, взагалі кажучи, допускають узагальнення на будь-яку кількість множин, більше двох (як воно тут сформульовано).

6.1.2. Взяття прообразу

Покладемо, A і B - Підмножини безлічі Y .

За аналогією з взяттям образу, взяття прообразу (перехід до прообразу) володіє також наступними двома очевидними властивостями:

- прообраз об'єднання дорівнює об'єднанню прообразів:
 $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$
- прообраз перетину дорівнює перетинанню прообразів:
 $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$

Дані властивості, також, допускають узагальнення на будь-яку кількість множин, більше двох (як воно тут сформульовано).

У випадку, якщо відображення *оборотно* (див. [нижче](#)), прообраз кожної точки області значень одноточковий, тому для оборотних відображень виконується наступне посилене властивість для перетинів:

- образ перетину дорівнює перетинанню образів: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$

6.2. Поведінка функцій

6.2.1. Сюр'єктивність

Функція f називається **сюр'єктивною** (або, коротко, **сюр'єкція**), якщо кожному елементу безлічі прибуття може бути підтверджено хоча б один елемент області визначення. Іншими словами, функція f **сюр'єктивна**, якщо образ безлічі X при відображенні збігається з безліччю Y : $f[X] = Y$.

Таке відображення називається ще **відображенням на**.

Якщо умова сюр'єктивності порушується, то таке відображення називають **відображенням в**.

6.2.2. Ін'єктивність

Функція f називається **ін'єктивною** (або, коротко, **ін'єкція**), якщо різним елементам множини X зіставлені різні елементи множини Y . Більш формально, функція f **ін'єктивна**, якщо для будь-яких двох елементів $x_1, x_2 \in X$ таких, що $f(x_1) = f(x_2)$, Неодмінно виконується $x_1 = x_2$.

Іншими словами, сюр'єкція - це коли "у кожного образу є прообраз", а ін'єкція - це коли "різні - в різні". Тобто, при ін'єкції не буває так, щоб два чи більше різних елементів X відображалися в один і той же елемент Y . А при сюр'єкції не буває так, щоб якийсь елемент Y не мав прообразу.

6.2.3. Бієктивність

Якщо функція є і сюр'єктивною, і ін'єктивною, то таку функцію називають **бієктивною** або **взаємно однозначною**.

Теорема (критерій бієкції)

Якщо відображення є одночасно ін'єкцією та сюр'єкцією, то воно бієктивне.

6.2.4. Зростання і спадання

Нехай дана функція $f: M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді

- функція f називається **зростаючою** на M , Якщо
 $\forall x, y \in M, x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$
- функція f називається **строго зростаючою** на M , Якщо
 $\forall x, y \in M, x > y \Rightarrow f(x) > f(y).$
- функція f називається **спадною** на M , Якщо

$$\forall x, y \in M, x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

- функція f називається **строго спадною** на M , Якщо $\forall x, y \in M, x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

(Строго) зростаюча або спадна функція називається (строго) монотонною.

6.2.5. Періодичність

Функція $f : M \rightarrow N$ називається періодичною з **періодом** $T \neq 0$, Якщо справедливо

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in M.$$

Якщо це рівність не виконано ні для якого $T \in M, T \neq 0$, То функція f називається **аперіодичною**.

6.2.6. Парність

- Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається непарною, якщо справедливо рівність $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in X$.
- Функція f називається парною, якщо справедливо рівність $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in X$.

6.2.7. Екстремуми функції

Нехай дана функція $f : M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in M^0$ - внутрешня точка області определения f . Тоді

- x_0 називається точкою абсолютного (локального) максимуму, якщо $\forall x \in M \quad f(x) \leq f(x_0)$;
- x_0 називається точкою абсолютного мінімуму, якщо $\forall x \in M \quad f(x) \geq f(x_0)$.

7. Приклади

В залежності від того, яка природа області визначення та області значень, розрізняють випадки, коли ці області - це:

- абстрактні множини - множини, без будь-якої додаткової структури;
- множини, які наділені певною структурою.

У першому випадку розглядаються відображення в узагальненому вигляді і вирішуються найбільш загальні питання. Таким загальним питанням, наприклад, є питання про порівняння множин за потужністю: якщо між двома множинами існує взаємно однозначне відображення (Бієкція), то два даних безлічі називають еквівалентними або рівнопотужних. Це дозволяє провести класифікацію множин у вигляді єдиної шкали, початковий фрагмент виглядає наступним чином:

- кінцеві множини - тут потужність безлічі збігається з кількістю елементів;
- лічильні множини - безлічі еквівалентні безлічі натуральних чисел;
- безлічі потужності континууму (наприклад, відрізок дійсної прямої або сама дійсна пряма).

Відповідно до цього, має сенс розглядати такі приклади відображень:

- кінцеві функції - відображення кінцевих множин;
- послідовності - відображення рахункового безлічі в довільне безліч;
- континуальні функції - відображення незліченних множин в кінцеві, рахункові або незліченні множини.

У другому випадку, основний об'єкт розгляду - задана на безлічі структура і те, що відбувається з цією структурою при відображенні: якщо існує взаємно однозначне відображення однієї структури в іншу, що при відображенні зберігаються властивості заданої структури, то говорять, що між двома структурами встановлено ізоморфізм. Таким чином, ізоморфні структури, задані в різних множинах, неможливо розрізнити, тому в математиці прийнято говорити, що дана структура розглядається "з точністю до ізоморфізму".

Існує велика різноманітність структур, які можуть бути задані на множинах. Сюди належить:

- структура порядку - частковий або лінійний порядок.
- алгебраїчна структура - групоїд, півгрупа, група, Кільце, тіло, область цілісності або полі.
- структура метричного простору - тут задається функція відстані;
- структура евклідового простору - тут задається скалярний твір;
- структура топологічного простору - тут задається сукупність т. н. "Відкритих множин";
- структура вимірного простору - тут задається функція (міра), яка діє на підмножину даного простору.

Природа множин визначає і властивості відповідних функцій, оскільки ці властивості формулюються в термінах заданих на множинах структурах. Наприклад, властивість безперервності, вимагає завдання топологічної структури.

8. Варіації і узагальнення

8.1. Частково визначені функції

Частково визначена функція f з множини X у множину Y є функція $f: X' \rightarrow Y$ з областю визначення $X' \subset X$.

Деякі автори розуміють під функцією, частково певну функцію. Це має свої переваги, наприклад можливий запис $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, де $f(x) = 1/x$ в цьому випадку $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8.2. Багатозначні функції

У силу визначення функції, заданому значенню аргументу відповідає рівно одне значення функції. Не дивлячись на це, нерідко, можна почути про т. зв. "Багатозначні" функції. Насправді, це не більше ніж зручне позначення функції, область значень якої саме є сімейством множин.

Нехай $f: X \rightarrow \mathbb{B}$, де $\mathbb{B}$ - Сімейство підмножин множини Y . Тоді $f(x)$ буде безліччю для всякого $x \in X$.